



# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

MOTI IRROTAZIONALI



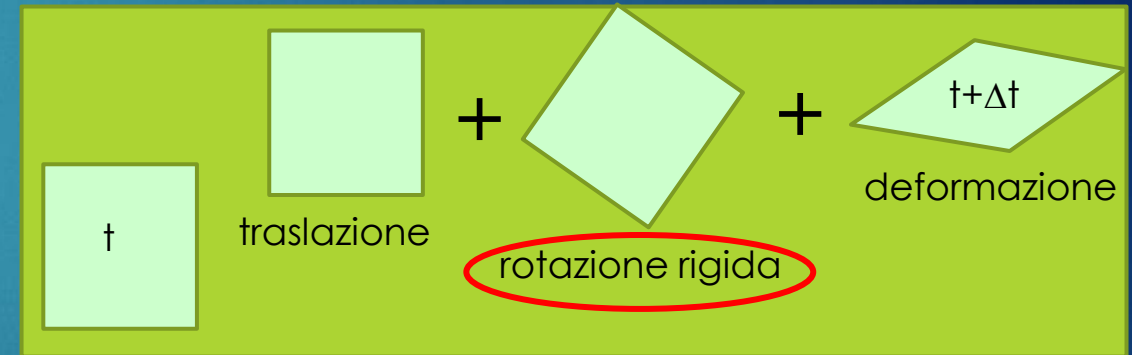
# Vorticità

## ► Rotore del vettore velocità (vorticità)

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \vec{b}_1(\partial u_3/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_3) \\ +\vec{b}_2(\partial u_1/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_1) \\ +\vec{b}_3(\partial u_2/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_2) \end{matrix}$$

## ► Tensore velocità di rotazione rigida

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}$$



✓  $\Omega_k = \frac{d\theta_k}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\omega_k}{2} \quad i \neq j \neq k$  velocità di rotazione rigida attorno ad asse  $x_k$

## ► Moti irrotazionali

Moti caratterizzati da vorticità identicamente nulla del campo di velocità:  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \equiv 0 \iff \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv 0$



# Potenziale di velocità

## ► Moto a potenziale di velocità

$$\vec{u} = \nabla \phi \iff u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \implies \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = 0 \implies \text{moto irrotazionale}$$

- ✓ Sotto ipotesi leggermente più restrittive, vale anche il viceversa: moto irrotazionale  $\implies$  moto a potenziale
- ✓ Le incognite scalari del campo di velocità si riducono da 3 (le componenti di  $\vec{u}$ ) a 1 (il potenziale  $\phi$ )

## ► Teorema di Lagrange

Un moto irrotazionale si mantiene tale al trascorrere del tempo se ricorrono le seguenti condizioni:

- Fluido ideale (le particelle non possono essere messe in rotazione da azioni tangenziali)
- Fluido barotropico:  $\rho = \rho(p)$
- Forze di massa dotate di potenziale  $U$ :  $\vec{f}_m = \nabla U$  (campo conservativo)
  - ✓ In particolare, un fluido ideale, pesante, incompressibile, isoterma e omogeneo ( $\rho = \text{cost}$ , moto isocoro) che parte da condizioni di quiete è animato da moto irrotazionale, essendo tale lo stato idrostatico
  - ✓ A tale situazione usuale si fa riferimento nel prosieguo



# Moti irrotazionali isocori

- Equazione di continuità ( $\rho = \text{cost}$ )

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Equazione di Laplace

- ✓ Il potenziale è soluzione dell'equazione di Laplace (il potenziale è *armonico*)
- ✓  $\nabla^2 \phi = 0$  lineare: una combinazione lineare di soluzioni dell'equazione di Laplace è anch'essa una soluzione
- ✓ La determinazione del campo di velocità non richiede la soluzione dell'equazione del moto
- Soluzione univocamente definita, a meno di una costante additiva, imponendo condizioni al contorno su:
  - potenziale  $\phi$  (*condizioni di Dirichlet*)
  - derivata del potenziale normale al contorno,  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  (*condizioni di Neumann*)
    - ✓  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n} = u_n \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = u_n$  è la componente della velocità normale al contorno
    - ✓ Prescrivere  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  equivale a prescrivere flussi volumetrici attraverso il contorno
    - ✓ Moti di filtrazione in mezzi porosi: potenziale proporzionale a quota piezometrica (livello pelo libero)





# Moti irrotazionali isocori

- Equazione del moto (liquido ideale in campo di forze di massa conservativo)

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla U - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad (\text{Equazione di Eulero}) \quad \longrightarrow \quad \frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) \quad \text{per liquido pesante} \quad (U = -gz)$$

- Giustificazione dello schema di fluido ideale nei moti irrotazionali (fluidi reali sono viscosi)

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad \text{per un liquido viscoso}$$

- Moto irrotazionale  $\longrightarrow \nabla^2 \vec{u} = \nabla^2 (\nabla \phi) = \nabla (\nabla^2 \phi) = 0$  per invertibilità ordine derivazione e  $\phi$  armonica
  - ✓ un liquido viscoso in moto irrotazionale si comporta come un fluido ideale
  - ✓ moto irrotazionale non possibile in prossimità di una parete che confini il campo di moto
  - ✓ condizioni di moto irrotazionale possono verificarsi soltanto a una certa distanza dalle pareti

- Teorema di Bernoulli

$$\frac{Du_i}{Dt} = -g \frac{\partial z}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad \longrightarrow \quad \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} u_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial (u_j u_j / 2)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \right) \quad \text{da cui}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2} = f(t) \quad \longrightarrow \quad z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2} = \text{cost in moto stazionario}$$

sull'intero campo di moto



# Moti irrotazionali isocori piani

## ► Funzione di corrente $\psi$

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad ; \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

- $d\psi = 0$  lungo le curve del piano sulle quali  $\psi = \text{cost}$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = -u_2 dx_1 + u_1 dx_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{dx_2}{dx_1}$$

- ✓ Le curve sulle quali  $\psi = \text{cost}$  sono linee di corrente

## ► Rete idrodinamica

- Linee equipotenziali ( $\phi = \text{cost}$ ) ortogonali a velocità  $\vec{u} = \nabla \phi$
- Linee di corrente ( $\psi = \text{cost}$ ) tangenti a vettori velocità
- ✓ Le due famiglie di curve hanno in ogni punto tangenti ortogonali
- Linee equipotenziali e linee di corrente formano la *rete idrodinamica*
- Si dimostra:
  - $\Delta\psi$  fra due linee di corrente = portata unitaria  $\Delta q$  fluente fra le linee
  - $\Delta\psi = \Delta\phi = \text{cost} \longrightarrow$  rete idrodinamica a maglie quadrate

